1^a LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA I - PG
(2014-2)

1. Seja $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ uma base para o espaço de estados de polarização de um fóton, onde $|H\rangle$ ($|V\rangle$) representa um estado de polarização linear orientada na direção horizontal (vertical). Podemos definir os estados de polarização linear rodados de um ângulo θ como

$$\begin{aligned} |\theta\rangle &= \cos\theta\,|H\rangle + \sin\theta\,|V\rangle\ , \\ |\theta+\pi/2\rangle &= -\sin\theta\,|H\rangle + \cos\theta\,|V\rangle\ , \end{aligned}$$

e os estados de polarização circular à esquerda e à direita como

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + i\,|V\rangle\right)\ , \\ |E\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle - i\,|V\rangle\right)\ . \end{aligned}$$

Nesta linguagem quântica, um polarizador orientado segundo um ângulo θ com a horizontal é descrito pelo operador de projeção $|\theta\rangle\langle\theta|$.

   (a) Determine a probabilidade de um fóton circularmente polarizado à direita ser transmitido por um polarizador orientado a 30^0.

   (b) Determine o estado dos fótons transmitidos.

   (c) Após a transmissão no primeiro polarizador, determine a probabilidade de transmissão em um segundo polarizador orientado a 60^0 e o estado final dos fótons transmitidos pelos dois polarizadores.

2. Seja $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ uma base para o espaço de estados de polarização de um fóton, onde $|H\rangle$ ($|V\rangle$) representa um estado de polarização linear orientada na direção horizontal (vertical). Podemos definir os estados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de polarização linear rodados de $\pm 45^0$ e os estados $\{|E\rangle, |D\rangle\}$ de polarização circular à esquerda e à direita como

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}\ , \qquad & |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + i\,|V\rangle\right)\ , \\ |-\rangle &= \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}\ , \qquad & |E\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle - i\,|V\rangle\right)\ . \end{aligned}$$

Considere os operadores

$$P_1 = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|\ , \qquad P_2 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\ , \qquad P_3 = |D\rangle\langle D| - |E\rangle\langle E|\ .$$

   (a) Dado um estado arbitrário representado pela matriz densidade ρ, determine $\langle P_j\rangle$ em função dos elementos da matriz densidade na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

   (b) Mostre que os elementos de ρ podem ser determinados a partir destes valores esperados. Este processo é chamado de tomografia de estado.

   (c) Determine a pureza do estado de polarização em termos de $\langle P_j\rangle$.

3. Considere o traço de uma matriz M definido por $Tr[M] \equiv \sum_j M_{jj}$.

   (a) Mostre que $Tr\,[ABC] = Tr\,[CAB] = Tr\,[BCA]$.

   (b) Mostre que o traço de um operador é invariante por transformações unitárias.

   (c) Utilize o resultado do item anterior e mostre que o traço de uma matriz é igual à soma dos seus autovalores.

   (d) Utilize os resultados dos itens anteriores e mostre que $det\left[e^M\right] = e^{Tr[M]}$.

4. Seja $\mathbf{S}$ o operador momento angular de uma partícula de spin 1/2 e U um operador unitário.

   (a) Mostre que as componentes do operador $\mathbf{S}' = U\,\mathbf{S}\,U^\dagger$ também satisfazem a relação de comutação
   $$[S_i', S_j'] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, S_k'$$
   .

   (b) Encontre os autovetores e autovalores de S_z' .

5. Dados dois operadores A e B, mostre as seguintes relações :

   (a) $\langle(\Delta A)^2\rangle\,\langle(\Delta B)^2\rangle = \frac{1}{4}\,|\langle[A,B]\rangle|^2$

   (b) $e^A\,B\,e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}\,[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}\,[A,[A,[A,B]]]...$

   (c) $e^{A+B} = e^A\,e^B\,e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ quando $[A,B] \propto \mathbb{1}$.

6. Seja $\hat{n} = \sin\theta\,\cos\phi\;\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\sin\phi\;\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\;\hat{\mathbf{z}}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine os autovalores de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$.

   (b) Determine os autovetores de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autovetores de S_z .

7. Verifique que as matrizes de Pauli satisfazem $\sigma_j^2 = \mathbb{1}$ $(j = x, y, z)$ e mostre que
   $$e^{i\,\gamma\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma} = \cos\gamma\,\mathbb{1} + i\,\sin\gamma\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma\ .$$

8. Seja $T(x) \equiv e^{ixP/\hbar}$ o operador de translação em 1 dimensão, onde P é o operador momento linear e x é um parâmetro real.

   (a) Mostre que $T^{-1}(x) = T^\dagger(x) = T(-x)$.

   (b) Mostre que $T(a)\,X\,T^\dagger(a) = X + a$ e que $T(a)\,F(X)\,T^\dagger(a) = F(X+a)$ onde X é o operador posição e F uma função analítica.

   (c) Mostre que $\langle x|\,T(a)|\psi\rangle = \psi(x+a)$, onde $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$.